

## 6. INTEGRALES DE LINEA

### 6.4. Teorema de Green

#### Teorema de Green

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un abierto simplemente conexo y  $F = (P, Q) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  un campo vectorial de clase  $\mathcal{C}^1$  (derivable con continuidad) en  $\Omega$ . Entonces, si  $\gamma \subset \Omega$  es una curva cerrada simple orientada positivamente y  $S$  es la unión de  $\gamma$  con su interior,  $S \subset \Omega$ , se tiene que:

$$\oint_{\gamma} F ds = \oint_{\gamma} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_S \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

#### Corolario

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un dominio simplemente conexo y  $F = (P, Q) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  un campo vectorial de clase  $\mathcal{C}^1$ . Entonces:

$$F \text{ es campo conservativo en } \Omega \iff \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \text{ en } \Omega$$

#### Ejemplos

1. Calcula el trabajo necesario para mover una partícula unidad sobre la elipse  $4x^2 + y^2 = 4$  con el campo de fuerzas  $F(x, y) = (y + 3x, 2y - x)$ .
2. Calcula la integral de  $F(x, y) = (x + 1)e^{x+y}\mathbf{i} + x(1 + e^{x+y})\mathbf{j}$  sobre la parte de la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$  del semiplano  $y \geq 0$ .

#### Teorema de Green para regiones múltiplemente conexas

Sean  $\gamma, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N \subset \mathbb{R}^2$  curvas cerradas simples verificando que:

- (i) Dos cualesquiera de ellas no se cortan.
- (ii) Todas las curvas  $\gamma_i$ ,  $1 \leq i \leq N$ , están contenidas en el interior de  $\gamma$ .
- (iii) Cada curva  $\gamma_i$  está en el exterior de  $\gamma_j$ ,  $1 \leq i \neq j \leq N$ .

Sea  $S$  la unión de  $\gamma$  con su interior que no es a la vez interior de alguna curva  $\gamma_i$ ,  $1 \leq i \leq N$ , y sea  $F = (P, Q) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $S \subset \Omega$ , derivable con continuidad. Entonces:

$$\iint_S \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial S} P dx + Q dy$$

donde  $\partial S = \gamma \cup \left( \bigcup_{i=1}^N \gamma_i \right)$  se recorre en sentido positivo (este sentido es el positivo para  $\gamma$  y el negativo para  $\gamma_i$ ,  $1 \leq i \leq N$ ).

#### Aplicación del teorema de Green al cálculo de áreas

Sea  $S \subset \mathbb{R}^2$ . Si se considera  $F(x, y) = \left( \frac{-y}{2}, \frac{x}{2} \right)$ , que es un campo vectorial de clase  $\mathcal{C}^1$  en  $\mathbb{R}^2$  y verifica que  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$ , entonces:

$$\text{area}(S) = \iint_S dx dy = \oint_{\partial S} \frac{-y}{2} dx + \frac{x}{2} dy = \frac{-1}{2} \oint_{\partial S} y dx - x dy$$

Eligiendo otros campos vectoriales adecuados, se pueden obtener otras fórmulas para el cálculo del área mediante integrales de línea. Por ejemplo:

$$\text{area}(S) = \oint_{\partial S} x dy \qquad \text{area}(S) = \oint_{\partial S} -y dx$$

## Ejemplo

Halla el área de un arco de la cicloide:  $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}, a > 0.$

## Componente normal de un campo vectorial sobre una curva plana

Sea  $\gamma$  una curva plana parametrizada por  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  con  $\alpha'(t) \neq 0, \forall t \in [a, b]$ . Se llama **vector normal unitario a la curva** en  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ , al vector

$$\mathbf{n} = \frac{(y'(t), -x'(t))}{\|\alpha'(t)\|}$$

Cuando la curva  $\gamma$  es cerrada y está orientada positivamente, el vector normal apunta hacia afuera.

Si  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  es un dominio,  $\gamma \subset \Omega$ , y  $F = (P, Q) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  es un campo vectorial de clase  $\mathcal{C}^1$  en  $\Omega$ , se llama **componente normal** de  $F$  sobre  $\gamma$  al campo escalar:

$$F \cdot \mathbf{n} = \text{proy}_{\mathbf{n}} F$$

## Teorema de la divergencia en el plano

Sea  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un abierto simplemente conexo y  $F = (P, Q) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  un campo vectorial de clase  $\mathcal{C}^1$  en  $\Omega$ . Entonces, si  $\gamma \subset \Omega$  es una curva cerrada simple orientada positivamente y  $S$  es la unión de  $\gamma$  con su interior, se cumple que:

$$\oint_{\gamma} F \cdot \mathbf{n} ds = \iint_S \text{div } F dx dy$$

## Ejemplo

Integra la componente normal de  $F(x, y) = (x^2, -xy)$  alrededor de la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$  orientada positivamente.

## Ejercicios

1. Utiliza el teorema de Green para hallar la integral del campo vectorial  $F(x, y) = (xy, x + y)$  sobre la frontera del recinto acotado limitado por las curvas  $y = x^2$  e  $y = x$  orientado positivamente.
2. Calcula la integral del campo vectorial  $F(x, y) = (2x^3 - y^3)\mathbf{i} + (x^3 + y^3)\mathbf{j}$  sobre la circunferencia unidad orientada positivamente, y comprueba que se verifica el teorema de Green.
3. Calcula  $\int_{\widehat{AB}} x dy - y dx$ , siendo  $A(a, 0)$ ,  $B(0, b)$ ,  $(a, b > 0)$ :
  - (a) sobre el arco de la curva  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  comprendido entre  $A$  y  $B$ .
  - (b) sobre el segmento de extremos  $A$  y  $B$ .
  - (c) Calcula el área limitada por las curvas anteriores.

4. Calcula la integral:

$$\int_{\gamma} \frac{(x^3 + xy^2 + x) dy - (y^3 + yx^2 + y) dx}{x^2 + y^2}$$

donde  $\gamma$  es el arco de la curva  $x^6 + y^6 = 5^6$  que va de  $B(5, 0)$  a  $A(-5, 0)$  por el semiplano superior.

5. Integra la componente normal de  $F(x, y) = (2xy, -2y^2)$  alrededor de la elipse  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  orientada positivamente.

**Soluciones y/o sugerencias a los ejercicios:**

1.  $\frac{1}{12}$ .

2.  $\frac{3\pi}{2}$ .

3. (a)  $\frac{ab\pi}{2}$ ; (b)  $ab$ ; (c)  $\frac{ab(\pi-2)}{4}$ .

4.  $\pi + \frac{50}{3}\beta\left(\frac{1}{6}, \frac{7}{6}\right)$ .

5. 0.